

Grundkurs Funktionalanalysis

Winfried Kabblo

Lösung ausgewählter Aufgaben

Aufgabe 1.3 a) Man hat $\frac{1}{t}x \in U \Leftrightarrow \|x\| < t$ und $\frac{1}{t}x \in B \Leftrightarrow \|x\| \leq t$.

b) folgt sofort aus a).

Aufgabe 1.4 Die nach (8) gebildete Menge $\text{co}(A)$ ist konvex. Für jede konvexe Menge $C \subseteq E$ mit $A \subseteq C$ ergibt sich auch $\text{co}(A) \subseteq C$ durch Induktion über n .

Aufgabe 1.5 Nur die Menge aus b) ist beschränkt.

Aufgabe 1.6 Alle Fragen sind zu verneinen.

① Eine Folge von „Trapez-Funktionen“ werde definiert durch $f_n(t) = 0$ für $t = 0$ und für $t \geq \frac{3}{n}$, $f_n(t) = n$ für $\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n}$ und linear dazwischen. Dann gilt $f_n(t) \rightarrow 0$ für alle $t \in [0, 1]$, $\|f_n\|_1 = 2$, $\|f_n\|_2 \geq \sqrt{n}$ und $\|f_n\|_{\text{sup}} = n$.

② Für $m, r \in \mathbb{N}_0$ sei $J_{m,r} := [r 2^{-m}, (r+1) 2^{-m}]$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n = 2^m + r$ mit $m, r \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq r < 2^m$. Für die Funktionen $g_n := \chi_{J_{m,r}} \in L_1[0, 1]$ gilt $\|f_n\|_1 \leq |J_{m,r}| = 2^{-m} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Für $t \in [0, 1]$ ist aber $(f_n(t))$ eine divergente Folge, da sie aus unendlich vielen Nullen und unendlich vielen Einsen besteht.

Aufgabe 1.7 Man hat $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$ für festes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{K}^n$.

Aufgabe 1.8 Die Funktion $h : [0, \infty) \mapsto [0, 1)$, $t \mapsto \frac{t}{1+t}$, ist streng monoton wachsend; daher gilt die Dreiecks-Ungleichung für d^* . Wegen $h^{-1}(s) = \frac{s}{1-s}$ folgt aus $d^*(x_n, x) \rightarrow 0$ auch $d(x_n, x) \rightarrow 0$. Wegen $d^* \leq 1$ gilt eine Abschätzung $d \leq C d^*$ i. a. nicht.

Aufgabe 1.9 Es sei $(x^{(n)}) = ((x_j^{(n)}))$ eine Cauchy-Folge in ℓ_p . Wegen $|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p$ sind die Folgen $(x_j^{(n)})$ für festes $j \in \mathbb{N}_0$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{K}$. Somit existieren die Zahlen $x_j := \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{(n)} \in \mathbb{K}$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{j=0}^{\ell} |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p^p \leq \varepsilon^p$$

für feste $\ell \in \mathbb{N}_0$ und alle $n, m \geq n_0$. Mit $m \rightarrow \infty$ folgt auch $\sum_{j=0}^{\ell} |x_j^{(n)} - x_j|^p \leq \varepsilon^p$

für $n \geq n_0$ und alle $\ell \in \mathbb{N}_0$. Für die Folge $x := (x_j)$ gilt also $x^{(n)} - x \in \ell_p$ und $\|x^{(n)} - x\|_p \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$, und daraus ergibt sich auch $x \in \ell_p$ sowie $\|x^{(n)} - x\|_p \rightarrow 0$.

Aufgabe 1.10 a) Nach der Hölderschen Ungleichung ist

$$\int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |f(t)|^q d\mu \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\Omega} 1 d\mu \right)^{1-\frac{p}{q}},$$

also $\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$.

b) wird in Formel (10.24) gezeigt (Jensensche Ungleichung).

Aufgabe 1.11 Es ist φ dicht in ℓ_p für $1 \leq p < \infty$; der Abschluss von φ in ℓ_∞ ist der Raum c_0 aller Nullfolgen, da dieser nach der folgenden Aufgabe dort abgeschlossen ist.

Aufgabe 1.12 ① Es seien $(x^{(n)})$ eine Folge in c und $x \in \ell_\infty$ mit $\|x - x^{(n)}\| \rightarrow 0$. Für $\xi_n := \lim_{j \rightarrow \infty} x_j^{(n)}$ gilt dann $|\xi_n - \xi_m| \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\|$, und daher existiert der Limes $\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \in \mathbb{K}$. Wie in Satz A.2.1 folgt dann auch $\xi = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j$. Daher sind die Räume c und c_0 abgeschlossen in ℓ_∞ .

② Mit der konstanten Folge $x := (1, 1, 1, \dots)$ ist $c = c_0 \oplus [x]$.

Aufgabe 1.13 a) Mit $q := \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ gilt $q_n = q + r_n$ mit $\|r_n\|_Q \rightarrow 0$. Man wählt $x \in X$ mit $\pi x = q$ sowie $s_n \in X$ mit $\pi s_n = r_n$ und $\|s_n\|_X \leq 2\|r_n\|_Q$ und setzt $x_n = x + s_n$.

b) folgt sofort aus $\pi(U_X) = U_Q$, c) ergibt sich aus b) mittels Satz A.2.5.

Aufgabe 1.14 Für $x \in E$ gilt $\pi x = 0 \Leftrightarrow x \in V$ und $\|\pi x\|_Q = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{V}$; daher ist $\|\cdot\|_Q$ genau dann eine Norm auf Q , wenn V in E abgeschlossen ist.

Aufgabe 1.15 a) Für $x \in \overline{A} \setminus A$ wird das Infimum $d_A(x) = 0$ auf A nicht angenommen.

b) Im Raum ℓ_∞^2 kann man $V = \mathbb{R} \times \{0\}$ und $x = (0, 1)$ nehmen, im Raum ℓ_1^2 etwa $V = \{(-t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $x = (1, 1)$.

Aufgabe 2.1 Mit den stetigen Projektionen π_M und π_N von $M \times N$ auf M und N kann man $K = \pi_M(A)$ und $L = \pi_N(A)$ nehmen.

Aufgabe 2.2 Es ist $K := \{t = (t_j) \in [0, 1]^r \mid \sum_{j=1}^r t_j = 1\}$ kompakt, und die Abbildung $f : (t_j) \mapsto \sum_{j=1}^r t_j x_j$ ist eine stetige Surjektion von K auf $\text{co}\{x_1, \dots, x_r\}$.

Aufgabe 2.3 Es seien $\varepsilon > 0$ und N ein präkompaktes ε -Netz für M . Dann hat N ein endliches ε -Netz, und dieses ist ein 2ε -Netz für M .

Aufgabe 2.4 Alle angegebenen Permanenzeigenschaften gelten mit Ausnahme der letzten. Dazu sei e_n der n -te „Einheitsvektor“ in ℓ_p . Dann gilt $x_n := \frac{1}{n}e_n \rightarrow 0$, und die Menge $A = \{x_n\} \cup \{0\}$ ist kompakt. Es ist jedoch $x := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x_n \in \overline{\text{co } A} \setminus \text{co } A$.

Aufgabe 2.5 Nein; dazu sei etwa $A = [0, 1]$ und $f_n(a)$ die n -te Ziffer der Dezimalbruchentwicklung von $a \in A$.

Aufgabe 2.6 Dies kann man wie Satz A.2.9 beweisen.

Aufgabe 2.7 Der Beweis von Theorem 2.5 lässt sich leicht übertragen.

Aufgabe 2.8 Man argumentiert ähnlich wie im Beweis von Theorem 2.5, vgl. etwa [Appell und Văth 2005], Satz 3.4.

Aufgabe 2.9 Man argumentiert wiederum ähnlich wie im Beweis von Theorem 2.5, vgl. etwa [Appell und Văth 2005], Satz 3.5. Für „(b) $\Rightarrow$ (c)“ setzt man einfach $b_j := \sup_{x \in A} |x_j|$.

Aufgabe 2.10 „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Es sei $\mathfrak{U}$ eine offene Überdeckung von M . Für $x \in M$ gilt $\rho(x) := \sup \{r > 0 \mid \exists U \in \mathfrak{U} \text{ mit } K_r(x) \subseteq U\} > 0$. Es sei nun $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dicht in M und $r_n := \frac{1}{2} \rho(x_n)$. Zu $x \in M$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $d(x, x_n) < \frac{1}{4} \rho(x)$; dann folgt $\rho(x_n) \geq \frac{3}{4} \rho(x)$ und daher $x \in K_{r_n}(x_n)$. Somit gilt $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_{r_n}(x_n)$, und mit $K_{r_n}(x_n) \subseteq U_n \in \mathfrak{U}$ folgt auch $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.

„(b) $\Rightarrow$ (c)“: Die offene Überdeckung $\mathfrak{U} := \{U_\varepsilon(x) \mid x \in M\}$ hat eine abzählbare Teilüberdeckung $\{U_\varepsilon(x_j) \mid j \in \mathbb{N}\}$, und $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ist ein ε -Netz.

„(c) $\Rightarrow$ (a)“: Man vereinigt abzählbare $\frac{1}{n}$ -Netze.

Aufgabe 2.11 Der Raum φ der endlichen Folgen ist separabel und nach Aufgabe 1.11 dicht in c_0 sowie ℓ_p .

Aufgabe 2.12 Man erhält den Raum

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \mid \forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 \forall t \in \mathbb{R}^n : |t| \geq R \Rightarrow |f(t)| \leq \varepsilon\}$$

aller stetigen Funktionen, die „in ∞ verschwinden“.

Aufgabe 2.13 Man konstruiert eine Isometrie von ℓ_∞ in $L_\infty[0, 1]$ wie in Aufgabe 3.11 und verwendet Satz 2.6.

Aufgabe 2.14 a) Für $\varphi(t, s) = \sum_{k=1}^n p_k(t) q_k(s) \in \mathbb{K}[t] \otimes \mathbb{K}[s]$ erhält man durch Ausmultiplizieren $\varphi \in \mathbb{K}[t, s]$. Umgekehrt gilt $\sum_{i,j=0}^m c_{ij} t^i s^j = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i=0}^m c_{ij} t^i \right) s^j$.

b) Man benutzt die gleichmäßige Stetigkeit stetiger Funktionen auf kompakten Räumen (Satz A.2.9).

Aufgabe 2.15 Man kann ähnlich wie in Satz 1.2 argumentieren.

Aufgabe 2.16 Eine Lösung zeigt Lemma 6.12.

Aufgabe 2.17 Eine Menge $A \subseteq \mathcal{C}^1[a, b]$ ist genau dann präkompakt, wenn sie beschränkt ist und die Mengen A sowie $A' := \{f' \mid f \in A\}$ gleichstetig sind. Die letzte Frage ist zu verneinen, so kann z.B. die Betragsfunktion in $\mathcal{C}[-1, 1]$ durch Polynome mit $\mathcal{C}^1$ -Norm ≤ 1 approximiert werden.

Aufgabe 2.18 a) ergibt sich wie in Aufgabe 2.8, b) folgt leicht aus a).

Aufgabe 2.19 a) folgt leicht aus Aufgabe 2.18.

b) ergibt sich aus der Sobolev-Abschätzung (8) und a).

Aufgabe 3.3 Es ist S stetig bezüglich aller angegebenen Normen, δ nur bezüglich $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ und $\|\cdot\|_{C^1}$.

Aufgabe 3.5 O.E. seien $K = [-1, 1]$ und $t = 0$. Weiter sei $g \in L_1[-1, 1]$ gegeben. Für die „Dreiecksfunktionen“ $f_n \in \mathcal{C}[-1, 1]$ mit $f_n(0) = 1$ und $f_n(s) = 0$ für $|s| \geq \frac{1}{n}$ gilt $J(g)(f_n) = \int_{-1}^1 f_n(t)g(t) dt \rightarrow 0$ aufgrund des Satzes über majorisierte Konvergenz.

Aufgabe 3.6 Man vgl. Formel (9.17).

Aufgabe 3.7 a) Für $x = (x_j) \in c$ sei $x^* = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j \in \mathbb{K}$. Für $\lambda > 0$ definiert man

$$T : (x_0, x_1, x_2, \dots) \rightarrow (\lambda x^*, x_0 - x^*, x_1 - x^*, \dots).$$

Dann ist $T : c \rightarrow c_0$ eine Isomorphie mit

$$T^{-1} : (y_0, y_1, y_2, \dots) \rightarrow \left(\frac{y_0}{\lambda}, y_1 + \frac{y_0}{\lambda}, y_2 + \frac{y_0}{\lambda}, \dots\right).$$

Man hat $\|T\| \leq \max\{2, \lambda\}$ und $\|T^{-1}\| \leq 1 + \frac{1}{\lambda}$, und mit $\lambda = 2$ ergibt sich $\|T\| \|T^{-1}\| \leq 3$. Die Wahl $\lambda = 2$ ist optimal; es gilt sogar $d(c, c_0) = 3$ nach M. Cambern (Studia Math. 30, 73-77 (1968)).

b) Der Punkt $x = (1, 1, 1, \dots)$ ist ein *Extremalpunkt* der Einheitskugel B_c von c , d. h. er liegt nicht im Innern einer in B_c verlaufenden Strecke. Die Einheitskugel von c_0 besitzt jedoch keinen Extremalpunkt.

Aufgabe 3.8 Die Räume c_0 und $\mathcal{C}[a, b]$ sind nicht isomorph: Nach den Aufgaben 3.6 und 2.11 ist der Dualraum $c'_0 \cong \ell_1$ separabel. Andererseits enthält $\mathcal{C}[a, b]'$ überabzählbar viele δ -Funktionale, und es ist $\|\delta_t - \delta_s\| = 2$ für $t \neq s$.

Aufgabe 3.9 Man definiert eine Isomorphie von $\mathbb{K} \times c_0$ bzw. $\mathbb{K} \times \ell_p$ auf c_0 bzw. ℓ_p durch $T(\xi, (x_0, x_1, x_2, \dots)) := (\xi, x_0, x_1, x_2, \dots)$.

Aufgabe 3.10 Man definiert eine Isomorphie von $\mathcal{C}^1[a, b]$ auf $\mathbb{K} \times \mathcal{C}[a, b]$ durch $Tf := (f(a), f')$ und erhält $T^{-1}(\xi, g)(t) = \xi + \int_a^t g(t) dt$.

Aufgabe 3.11 a) Man benutzt den Hinweis, Satz 2.6 und Aufgabe 3.10.

b) ① Man definiert $P \in L(\mathcal{C}[0, 1], c_0)$ durch $Pf := (f(2^{-j}) - f(0))$; dann gilt $\|P\| \leq 2$ und $P\Phi x = x$ für $x \in c_0$. Durch $T : f \mapsto (Pf, f - \Phi Pf)$ wird ein Isomorphismus von $\mathcal{C}[0, 1]$ auf $c_0 \times N(P)$ definiert mit $T^{-1}(x, n) = \Phi x + n$.

② Man definiert $Q \in L(L_\infty[0, 1], \ell_\infty)$ durch $Qf := (2^{j-1} \int_{I_j} f(t) dt)$ mit den Intervallen $I_j = (2^{-j+1}, 2^{-j})$ und argumentiert wie in ①.

Aufgabe 3.12 a) Für $v, v' \in P_V(x)$ und $s \in [0, 1]$ gilt $d_V(x) \leq \|x - (sv + (1-s)v')\| \leq s\|x - v\| + (1-s)\|x - v'\| = d_V(x)$.

b) Für $v \in V$ gilt $\|x - v\| > \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j-1} |x_j - v_j| \geq \frac{1}{2} |\varphi(x)|$. Für $\varepsilon > 0$ wählt man $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2^{n-1}}{2^n-1} < \frac{1}{2} + \varepsilon$ und setzt $y = \frac{2^{n-1}}{2^n-1}(\alpha, \dots, \alpha, 0, 0, \dots)$ mit $\alpha := \varphi(x)$, wobei die erste 0 an Stelle n steht. Dann ist $\varphi(y) = \alpha$, also $v := x - y \in V$, und man hat $\|x - v\| = \|y\| < (\frac{1}{2} + \varepsilon) |\varphi(x)|$.

Aufgabe 3.13 a) Man wählt $y \in X$ mit $d := d_V(y) > 0$. Es gibt $v \in V$ mit $0 < \|y - v\| < \frac{d}{\varepsilon}$, und man setzt $x = \frac{y-v}{\|y-v\|}$.

b) Es sei X ein unendlichdimensionaler Raum. Zu $x_1 \in X$ mit $\|x_1\| = 1$ gibt es nach a) ein $x_2 \in X$ mit $\|x_2\| = 1$ und $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$. Wiederum nach a) gibt es ein $x_3 \in X$ mit $\|x_3\| = 1$ und $d_{[x_1, x_2]}(x_3) \geq \frac{1}{2}$. Man fährt so fort und erhält eine Folge (x_j) in X mit $\|x_j\| = 1$ und $\|x_j - x_k\| \geq \frac{1}{2}$ für $j \neq k$.

Aufgabe 3.14 Man setzt $\|(g_0, \dots, g_m)\|^p := \sum_{j=0}^m \|g_j\|_{L_p}^p$ für $1 \leq p < \infty$. Die Isometrie ergibt sich durch Fortsetzung mittels Satz 3.5.

Aufgabe 3.15 a) ist ein einfacher Spezialfall der Transformationsformel.

b) Für $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ verwendet man die gleichmäßige Stetigkeit.

Aufgabe 3.16 a) Für $x \in \mathbb{K}^n$ ist $\|Tx\|_{\infty} = \max_{\|y\|_1 \leq 1} |y^{\top}Ax| = \max_{\|y\|_1 \leq 1} |x^{\top}A^{\top}y| \leq \max_{\|y\|_1 \leq 1} \|A^{\top}y\|_1 \|x\|_{\infty} = \|A^{\top}\|_{S^S} \|x\|_{\infty} = \|A\|_{Z^S} \|x\|_{\infty}$ nach (10). Umgekehrt sei $\|A\|_{Z^S} = \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$. Man wählt $\alpha_j \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha_j| = 1$ und $\alpha_j a_{kj} = |a_{kj}|$; für $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ gilt dann $\|x\|_{\infty} = 1$ und $\|Tx\|_{\infty} \geq \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = \|A\|_{Z^S}$.

b) Man hat $|a_{ij}| = |e_i^{\top}Te_j| \leq \|T\|_{L(\ell_2^n, \ell_2^m)}$.

c) Analog zu (24) hat man $\|T\|_{L(\ell_p^n, \ell_p^m)} \leq \|A\|_{Z^S}^{1/q} \|A\|_{S^S}^{1/p}$.

Aufgabe 3.17 a) Es ist $S_{\kappa_1}(S_{\kappa_2}f)(t) = \int_K \kappa_1(t, u) \int_K \kappa_2(u, s) f(s) ds du = S_{\kappa}f(t)$.

b) Für $\|\cdot\|_{ZI}$ benutzt man (21), für $\|\cdot\|_{L_2(K^2)}$ die Schwarzsche Ungleichung. Nach (23) gilt $\int_K |\kappa(t, s)| dt = \int_K |\int_K \kappa_1(t, u) \kappa_2(u, s) du| dt \leq \|\kappa_1\|_{SI} \int_K |\kappa_2(u, s)| du \leq \|\kappa_1\|_{SI} \|\kappa_2\|_{SI}$ für alle $s \in K$.

Aufgabe 3.18 folgt sofort aus der Schwarzschen Ungleichung.

Aufgabe 3.19 Mittels Transformation auf Kugelkoordinaten erhält man $\|\kappa\|_{ZI} < \infty$ und $\|\kappa\|_{SI} < \infty$. Man hat $\kappa \in L_2(\Omega^2)$ nur für $\gamma < \frac{n}{2}$.

Aufgabe 3.20 Die stetige Funktion $|\det| : X^n \rightarrow \mathbb{K}$ nimmt auf der kompakten Kugel $B := \{(u_1, \dots, u_n) \in X^n \mid \max_{1 \leq j \leq n} \|u_j\| \leq 1\}$ ihr Maximum δ in $(x_1, \dots, x_n)$ an, und man setzt $\varphi_j(x) = \frac{1}{\delta} \det(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_n)$.

Aufgabe 4.1 a) Man setzt $\|f\| := \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \|f^{(j)}\|_{\text{sup}}$.

b) Wegen $(f^k)'(t) = kf(t)^{k-1}f'(t)$ konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} (f^k)'(t)$ gleichmäßig, und dies gilt auch für die Reihen der Ableitungen der Ordnung $\leq m$.

Aufgabe 4.2 Durch $Sx = \sum_{k=0}^{\infty} T^k x$ wird eine lineare Abbildung $S: X \rightarrow X$ definiert, die zu $I - T$ invers ist. Die Stetigkeit von S folgt aus Satz 8.5 oder Satz 8.8.

Aufgabe 4.3 a) Die Matrix $A = (a_{jk})$ definiert einen Operator $T \in L(\ell_2)$ mit $\|T\| < 1$.

b) Die Matrizen $A_n = (a_{jk})_{0 \leq j, k \leq n}$ definieren Operatoren $T_n \in L(\ell_2^{n+1})$ mit $\|T_n\| < 1$. Mit $b_{jk} = a_{jk}$ für $0 \leq j, k \leq n$ und $b_{jk} = 0$ sonst definiert $B_n = (b_{jk})$ einen Operator $S_n \in L(\ell_2)$. Man hat $\|T - S_n\| \rightarrow 0$ und daher auch $\|(I - T)^{-1} - (I - S_n)^{-1}\| \rightarrow 0$.

Aufgabe 4.4 Das einzige zweiseitige Ideal in $L(\mathbb{C}^n)$ ist $\{0\}$.

Aufgabe 4.5 Für feste $k \in \mathbb{N}$ schreibt man $n = mk + r$ und zeigt $\limsup \alpha_n^{1/n} \leq \alpha_k^{1/k}$.

Aufgabe 4.6 Die Abschätzung $r(xy) \leq r(x)r(y)$ folgt sofort aus $\|(xy)^n\| \leq \|x^n\| \|y^n\|$. Für $r(x + y) \leq r(x) + r(y)$ benutzt man die binomische Formel, vgl. etwa [Heuser 2006], Satz 13.11.

Aufgabe 4.7 ergibt sich aus den Aufgaben 3.17 und 3.18.

Aufgabe 4.8 Man hat $\|D\| = r(D) = \sup_j |\alpha_j|$. Es ist $\{\alpha_j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$ die Menge der Eigenwerte, und der Abschluss dieser Menge ist das Spektrum $\sigma(D)$.

Aufgabe 4.9 a) Es ist $\sigma(M_a) = \{a(t) \mid t \in K\}$, also $r(M_a) = \|M_a\| = \|a\|_{\text{sup}}$. Es gibt genau dann Eigenwerte, wenn a auf einer Menge positiven Maßes konstant ist.

b) Man nimmt für $T = M_z$ den Multiplikationsoperator mit der Funktion $z \mapsto z$.

c) ist klar.

Aufgabe 4.10 Es ist $C := \sup \{\|R_x(\lambda)\| \mid \lambda \notin D\} < \infty$, und man setzt $\varepsilon := \frac{1}{C}$.

Aufgabe 4.11 a) Es seien $x_0 \in G^\ell(\mathcal{A})$ und $y_0 \in \mathcal{A}$ mit $y_0 x_0 = e$. Für $x \in \mathcal{A}$ gilt dann $y_0 x = e + y_0(x - x_0) \in G(\mathcal{A})$ für $\|x - x_0\| < \|y_0\|^{-1}$, und $y := (e + y_0(x - x_0))^{-1} y_0$ ist eine Linksinverse von x . Gilt für eine Folge $x_n \rightarrow x_0$ auch $x_n y_n = e$, so muss auch $xy = e$ sein.

b) Ist $\lambda e - x \in G^\ell(\mathcal{A}) \setminus G(\mathcal{A})$, so folgt mit a) der Widerspruch $\mu e - x \in G^\ell(\mathcal{A}) \setminus G(\mathcal{A})$ für alle μ nahe λ .

c) Eine Rechtsinverse für $|\lambda| < 1$ ist gegeben durch $R_\lambda = S^+(\lambda S^+ - I)^{-1}$, und man hat $R_\lambda: (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1 + \lambda x_0, x_2 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_0, x_3 + \lambda x_2 + \lambda^2 x_1 + \lambda^3 x_0, \dots)$.

Aufgabe 4.12 Nach Aufgabe 4.11 a) gibt es zu $s \in K$ eine Kugel $U(s)$ und eine Funktion $g_s \in \mathcal{C}(U(s), \mathcal{A})$ mit $g_s(t)f(t) = e$ für $t \in U(s)$. Der kompakte Raum K

wird durch endlich viele Kugeln $U_1, \dots, U_r$ überdeckt. Mit einer stetigen ZdE wie in (2.3) setzt man $f = \sum_{j=1}^r \alpha_j g_j$.

Aufgabe 4.13 a) Für $\mu \in \rho(x)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \mu| \|R_x(\mu)\| < 1$ gilt $\lambda \in \rho(x)$ und $R_x(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k R_x(\mu)^{k+1} (\lambda - \mu)^k$.

b) Für $\lambda \in \rho(x)$ und $\alpha \in \sigma(x)$ gilt $|\lambda - \alpha| \|R_x(\lambda)\| \geq 1$ nach a).

Aufgabe 4.14 a) ① Für $0 \neq x = (x_j) \in \ell_p$ gibt es einen Index k mit $x_k \neq 0$. Es ist $\eta_k : x \mapsto x_k$ eine stetige Linearform auf ℓ_p , und man hat $\eta_k(x) \neq 0$. Dieses Argument gilt auch für c_0 , c und gewichtete Folgenräume.

② Für $0 \neq f \in \mathcal{C}(K)$ gibt es $s \in K$ mit $\delta_s(f) = f(s) \neq 0$. Dieses Argument gilt auch für die Räume $\mathcal{C}^m[a, b]$.

③ Für $0 \neq f \in L_p(\mu)$ gibt es eine messbare Funktion α mit $|\alpha| = 1$ und $|f| = \alpha f$ f.ü. Es ist $g := \alpha |f|^{p-1} \in L_q(\mu)$, und $J_g : \varphi \mapsto \int_{\Omega} \varphi g \, d\mu$ definiert eine stetige Linearform auf $L_p(\mu)$. Es gilt $J_g(f) = \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu \neq 0$.

b) Zu $0 \neq T \in L(X, Y)$ gibt es $x \in X$ mit $Tx \neq 0$. Nach Voraussetzung existiert $\eta \in Y'$ mit $\eta(Tx) \neq 0$, und $T \mapsto \eta(Tx)$ definiert eine stetige Linearform auf $L(X, Y)$.

Aufgabe 4.15 Für $x \in \mathcal{A}$ existiert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\lambda e - x \in \mathcal{A} \setminus G(\mathcal{A}) = \{0\}$.

Aufgabe 4.16 a) Man berechnet $(e - yx)(e + yzx) = e$.

b) Das „Spektrum“ linearer Operatoren auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ kann unbeschränkt sein.

Aufgabe 4.17 ① g^p hat einen eindeutig bestimmten Fixpunkt x^* .

② Es ist $g^p(g(x^*)) = g(x^*)$, also $g(x^*) = x^*$.

③ Für festes $0 \leq r < p$ und $x_0 \in M$ gilt $g^{kp+r}(x_0) = g^{kp}(g^r(x_0)) \rightarrow x^*$.

Aufgabe 4.18 a) ist klar.

b) Es ist $g : t \mapsto \log(1 + e^t)$ schwache Kontraktion auf $\mathbb{R}$ ohne Fixpunkt. Für eine allgemeine schwache Kontraktion $g : M \rightarrow M$ sei $\eta := \inf \{d(x, g(x)) \mid x \in M\} \geq 0$. Für kompaktes M gibt es $x_0 \in M$ mit $\eta = d(x_0, g(x_0))$, und im Fall $\eta > 0$ erhält man einen Widerspruch.

Aufgabe 4.19 Die Iteration konvergiert für $|x_0| < \xi_2 = 2.1268$ stets gegen ξ_1 , da $(x_n)_{n \geq 1}$ monoton fällt; für $|x_0| > \xi_2$ hat man Divergenz. Nur für $a < \operatorname{Arsinh} 2 = 1.4436$ hat man $\|g'\|_{[-a, a]} < 1$. Zur Berechnung von ξ_2 löst man $x = \operatorname{Arcosh}(2x)$; es gilt nämlich $|2 \operatorname{Arcosh}'(2\xi_2)| < \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Aufgabe 4.20 Die zweite (Volterra-) Gleichung ist eindeutig lösbar für $\gamma \geq 1$ und alle λ , die erste für $\gamma \geq 1$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| \gamma \pi^\gamma (e^\pi - 1) < 1$.

Aufgabe 4.21 Die Lösung ist $x(t) = \sinh t$.

Aufgabe 5.1 Man hat $f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}$ und erhält $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Aufgabe 5.2 Man erhält $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

Aufgabe 5.3 Lesen Sie Satz 8.14!

Aufgabe 5.4 a) Für $\varepsilon > 0$ wählt man $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|s_n - \ell| < \varepsilon$ für $n \geq n_1$. Dann folgt $|\sigma_n - \ell| = \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^n (s_k - \ell) \right| \leq \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{n_1} (s_k - \ell) \right| + \frac{n-n_1}{n+1} \varepsilon < 2\varepsilon$ für $n \geq n_0 \geq n_1$.

b) Es gilt $s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (s_n - s_k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (k+1)a_k \rightarrow 0$.

c) Man hat $\frac{s_n}{n+1} = \sigma_n - \frac{n}{n+1} \sigma_{n-1} \rightarrow 0$ und damit auch $\frac{a_n}{n} \rightarrow 0$.

Aufgabe 5.5 Man setzt für f eine Dirac-Folge ein und verwendet Satz 5.5.

Aufgabe 5.6 Die erste Gleichung ergibt sich mittels geometrischer Reihe, daraus leicht die zweite.

Aufgabe 5.7 Wie in Satz 5.4 folgen a) und b) aus Satz 3.9.

c) Ist $(g * f)(t) \neq 0$, so gibt es $s \in \text{supp } f$ mit $t - s \in \text{supp } g$.

Aufgabe 5.8 a) An Stelle von ρ wählt man $\rho(x) = c_n \rho(|x|)$ in n Variablen.

c) Für $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ verwendet man die gleichmäßige Stetigkeit, dann Satz 3.3.

Aufgabe 5.10 Für $f, g \in W_1^1(a, b) \subseteq \mathcal{C}[a, b]$ gilt $f'g + fg' \in L_1(a, b)$, und für $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$ ergibt sich $\int_a^b f g \varphi dt = - \int_a^b (f' g \varphi + f g' \varphi) dt$ mittels Approximation von f und g gemäß Satz 5.11.

Aufgabe 5.12 a) Der Raum $\overset{\circ}{W}_p^1(a, b)$ ist in $W_p^1(a, b)$ abgeschlossen und enthält $\mathcal{D}(a, b)$. Eine Funktion $f \in \overset{\circ}{W}_p^1(a, b)$ zerlegt man mittels ZdE in einen „linken“ und einen „rechten“ Anteil, approximiert diese durch $f(t \pm \eta)$ und faltet diese Funktionen mit ρ_ε . Einzelheiten findet man etwa bei [Triebel 1972], Satz 5.4.

b) Man wendet a) auf $f - f(a)$ an.

Aufgabe 5.14 Man integriert partiell über den Teilintervallen.

Aufgabe 5.15 findet man etwa in [Kaballo 2000], Abschnitt 23. Für c) setzt man $\|f\| = \|f\|_{L_1} + \mathbf{V}(f)$, wobei der letzte Ausdruck die *totale Variation* von f ist.

Aufgabe 5.16 a) Zu $f \in W_1^1(a, b)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $g \in \mathcal{C}[a, b]$ mit $\int_a^b |f' - g| dt \leq \varepsilon$. Es folgt $\sum_k |f(b_k) - f(a_k)| \leq \sum_k \int_{a_k}^{b_k} |f'(t)| dt \leq \varepsilon + \sum_k \int_{a_k}^{b_k} |g(t)| dt \leq \varepsilon + \|g\|_{\text{sup}} \delta$.

b) Die beiden ersten Aussagen sind klar. Zu $\varepsilon > 0$ wählt man $\delta > 0$ gemäß absoluter Stetigkeit. Für eine Nullmenge N gibt es disjunkte Intervalle mit $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(J_k) < \delta$. Es gibt $a_k < b_k \in J_k$ mit $\lambda(f(J_k)) = |f(b_k) - f(a_k)|$, und es folgt

$$\lambda(f(N)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(f(J_k)) < \varepsilon.$$

Aufgabe 5.17 Man hat $s_n(f; t) - \tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)}{\sin \frac{s}{2}} \sin(2n+1)\frac{s}{2} ds$ wie im Satz von Dini. Nach der Lösung von Aufgabe 5.16 a) gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t)}{\sin \frac{s}{2}} \sin(2n+1)\frac{s}{2} \right| ds \leq \varepsilon$ für alle $t \in K$, und das Integral über $\delta \leq |s| \leq \pi$ strebt gegen 0 gleichmäßig auf K , da der Integrand bzgl. $t \in K$ in einer kompakten Menge variiert.

Aufgabe 5.18 ergibt sich sofort mittels Aufgabe 5.17.

Aufgabe 6.1 a) Da der Träger von $x \in \ell_1(I, X)$ abzählbar ist, kann man $I = \mathbb{N}_0$ annehmen und wie in Aufgabe 1.9 verfahren.

b) Für einen Hilbertraum X ist auch $\ell_2(I, X)$ ein Hilbertraum.

Aufgabe 6.2 Man kann $I = \mathbb{N}_0$ annehmen. Für $(\xi_k) \in \ell_2$ sei $x = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k e_k$.

„ $\Rightarrow$ “: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $\|x - \sum_{k=0}^m \xi_k e_k\|^2 = \sum_{k=m+1}^{\infty} |\xi_k|^2 \leq \varepsilon$; Formel (16) gilt dann mit $I_0 = \{0, \dots, m\}$.

„ $\Leftarrow$ “: Es gibt ℓ mit $I_0 \subseteq \{0, \dots, \ell\}$, und für $m \geq \ell$ folgt $\|x - \sum_{k=0}^m \xi_k e_k\|^2 \leq \varepsilon$.

Aufgabe 6.4 Wegen $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ hat man für Einheitsvektoren $\|x-y\|^2 = 4 - \|x+y\|^2$.

Aufgabe 6.5 a) Der Abstand wird für $\alpha_i = \langle y | e_i \rangle$ minimal. b) folgt sofort aus a).

Aufgabe 6.6 Es ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Aufgabe 6.7 Eine Orthonormalbasis von $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ bilden die Funktionen $\{\varphi_k(t)\psi_k(s)\}_{k=0}^{\infty}$.

Aufgabe 6.8 a) Es ist $\dim V \leq \dim E/G = \dim U$, vgl. Satz A.1.3.

b) ① Im Fall $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k - e_k\|^2 < 1$ ist der Operator $T : e_k \mapsto f_k$ invertierbar wegen $\|I - T\| < 1$.

② Im allgemeinen Fall gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=m+1}^{\infty} \|f_k - e_k\|^2 < 1$. Nun ist der Operator $S \in L(H)$ mit $Se_k = e_k$ für $k \leq m$ und $Se_k = f_k$ für $k > m$ bijektiv. Es folgt $H = [e_0, \dots, e_m] \oplus [\overline{f_k}]_{k>m}$ und mit a) auch $H = [f_0, \dots, f_m] \oplus [\overline{f_k}]_{k>m}$.

Aufgabe 6.9 ergibt sich wie im Fall ℓ_2 . Es ist $\{\eta_k := \frac{1}{a_k} e_k\}$ eine Orthonormalbasis von $\ell_2(a)$, und eine Menge ist genau dann präkompakt, wenn die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 |x_j|^2$ auf dieser gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 6.10 b) „ $\Leftarrow$ “ folgt aus Aufgabe 6.9 d).

„ $\Rightarrow$ “ Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=m}^{\infty} b_j^2 |x_j|^2 \leq \varepsilon^2$ für alle $x \in \ell_2(a)$ mit $\|x\|_{\ell_2(a)} \leq 1$.

Anwendung auf $\eta_k = \frac{1}{a_k} e_k$ liefert $\frac{b_k}{a_k} \leq \varepsilon$ für $k \geq m$.

Aufgabe 6.11 a), b) Man erhält $\ell_2(a)' \cong \ell_2(\frac{1}{a})$.

c) Für $s \leq 0$ definiert man $H_{2\pi}^{-s}$ als Raum der stetigen Linearformen auf $H_{2\pi}^s$.

d) Für $g \in L_{2\pi}^1$ und $s > \frac{1}{2}$ definiert man die Linearform $L_g : H_{2\pi}^s \rightarrow \mathbb{C}$ durch $L_g(e_k^s) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_k^s(t) \overline{g(t)} dt = \langle k \rangle^{-s} \widehat{g}(-k)$. Für $(\xi_k) \in \ell_2(\mathbb{Z})$ und $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k e_k^s \in H_{2\pi}^s$ ergibt

sich $|L_g(f)| = |\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle k \rangle^{-s} |\xi_k| |\widehat{g}(-k)| \leq C \|f\|_{H^s} \|g\|_{L_1}$ nach der Schwarzischen Ungleichung.

Aufgabe 6.12 Man definiert $\Lambda^{t-s} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k e_k^s \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle k \rangle^{s-t} \xi_k e_k^s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k e_k^t$.

Aufgabe 6.13 folgt aus Formel (6.28): $\widehat{f}'(k) = ik \widehat{f}(k)$.

Aufgabe 6.14 Es ist $\|h\|_{W_p^s} < \infty \Leftrightarrow ps < 1$. Dazu integriert man zuerst über t und zerlegt das Integrationsintervall in drei Teile. Die Singularität liefert (für $\tau \geq 0$) dann $\int_{-\tau}^0 |h(t+\tau) - h(t)|^p dt \sim |\tau|$, der Rest ist $\sim |\tau|^p$.

Aufgabe 6.15 a) Man hat $|\widehat{f}(k)| \leq C_s \langle k \rangle^{-s}$ für alle $s > 0$.

b) Man wählt $\widehat{f}(2^j) = 2^{-sj}$ und $\widehat{f}(k) = 0$ für alle anderen k .

Aufgabe 7.1 Man hat $a_{ij} = \langle S_\kappa e_j | e_i \rangle = \int_\Omega \int_\Omega \kappa(t, s) e_j(s) \overline{e_i(t)} ds dt$, und die Funktionen $\overline{e_j(s)} e_i(t)$ bilden eine Orthonormalbasis von $L_2(\Omega^2)$.

Aufgabe 7.2 Es ist $\|A\| \leq \sum_{\ell=-N}^N \sup_{i-j=\ell} |a_{ij}|$.

Aufgabe 7.3 a) Es ist $\sum_{i=0}^{\infty} |\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x_j|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |\sum_{j=0}^{\infty} b_{ij} c_{ij} x_j|^2 \leq \sum_{i=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{\infty} |b_{ij}|^2 \sum_{j=0}^{\infty} |c_{ij} x_j|^2) \leq C_1 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |c_{ij} x_j|^2 \leq C_1 C_2 \sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^2$.

b) Es sei $b_{ij} = c_{ij} = 0$ für $j > i$ sowie $b_{ij} = (i+1)^{-1/4} j^{-1/4}$ und $c_{ij} = (i+1)^{-3/4} j^{1/4}$ für $j \leq i$. Dann gilt $\sum_{j=0}^{\infty} |b_{ij}|^2 \leq 2$ und $\sum_{i=0}^{\infty} |c_{ij}|^2 \leq 3$, nach a) also $\|A\| \leq \sqrt{6}$. Man hat $\|A\|_{ZS} = 1$, aber $\|A\|_{SS} = \infty$.

Aufgabe 7.4 Man setzt einfach $T = T_0 P$ mit der orthogonalen Projektion P von H auf V .

Aufgabe 7.5 Für festes $y \in H$ wendet man den Rieszschen Darstellungssatz auf die stetige Linearform $\beta : x \mapsto \beta(x, y)$ an.

Aufgabe 7.6 a) Mit der orthogonalen Projektion Q von G auf $R(T)$ ist $M(y) = \{x \in H \mid Tx = Qy\}$.

b) Das gesuchte Element ist die metrische Projektion $T^\times y = P_{M(y)}(0)$ von 0 auf $M(y)$. Es handelt sich um den eindeutig bestimmten Vektor in $M(y) \cap N(T)^\perp$.

c) Mit $T_1 := T|_{N(T)^\perp} : N(T)^\perp \rightarrow R(T)$ ist $T^\times = T_1^{-1} Q$ stetig nach Satz 8.8.

Aufgabe 7.7 a) Man kann $[a, b] = [-1, 1]$ annehmen. Offenbar ist P_n ein Polynom vom Grad n . Man berechnet $\langle P_n | P_m \rangle = 0$ für $n \neq m$ und $\langle P_n | P_n \rangle = 1$ mittels $\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^\pi \sin^{2n+1} u du = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2$.

b) Es seien $x_1, \dots, x_k$ alle Nullstellen ungerader Ordnung von P_n in (a, b) . Für $P(x) := (x - x_1) \cdots (x - x_k)$ gilt dann $\langle P_n, P \rangle \neq 0$, also $\deg P = n$.

Aufgabe 7.8 Man substituiert $t = \cos s$ und benutzt die Dichtheit von $\mathcal{C}[-1, 1]$ in diesem Hilbertraum.

Aufgabe 7.9 a) rechnet man nach; in b) integriert man partiell unter Verwendung von a). Die Hermite-Funktionen bilden sogar eine Orthonormalbasis von $L_2(\mathbb{R})$; dies kann man mittels *Fourier-Transformation* einsehen, vgl. etwa [Kaballo 1999], 41.16.

Aufgabe 7.11 b) Man definiert das Skalarprodukt mittels der Polarformeln (6.18) bzw. (6.19), vgl. etwa [Werner 2007], V.1.7.

Aufgabe 7.12 Nach (7.7) gilt $(\lambda I - S_{*a})f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda - \hat{a}(k)) \langle f | e_k^0 \rangle e_k^0$, und es folgt $g \in R(\lambda I - S_{*a}) \Leftrightarrow \langle g | e_k^0 \rangle = 0$ für alle k mit $\hat{a}(k) = \lambda \Leftrightarrow g \in N(\lambda I - S_{*a})^\perp$. In diesem Fall sind alle Lösungen der Gleichung $(\lambda I - S_{*a})f = g$ gegeben durch $f = \sum_{\hat{a}(k) \neq \lambda} \frac{1}{\lambda - \hat{a}(k)} \langle f | e_k^0 \rangle e_k^0 + \sum_{\hat{a}(k) = \lambda} \xi_k e_k^0$ mit beliebigen $\xi_k \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 7.13 Aus $Tx = \lambda x$ folgt auch $T^*x = \bar{\lambda}x$ nach Satz 7.12. Für Eigenvektoren x, y zu Eigenwerten λ, μ von T folgt daher $(\lambda - \mu) \langle x | y \rangle = \langle \lambda x | y \rangle - \langle x | \bar{\mu} y \rangle = \langle Tx | y \rangle - \langle x | T^*y \rangle = 0$.

Aufgabe 7.14 a) rechnet man leicht nach.

b) Man hat $T(V) \subseteq V \Leftrightarrow PTx = Tx$ für alle $x \in V$. Weiter ist dies äquivalent zu $[\forall x \in V \forall y \in V^\perp : \langle Tx | y \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x | T^*y \rangle = 0] \Leftrightarrow T^*(V^\perp) \subseteq V^\perp$.

c) Nach b) gilt $(T|_V)^* = T^*|_V$ in $L(V)$.

Aufgabe 7.15 a) ist klar.

b) Die Einschränkung ist der nicht normale Rechts-Shift-Operator S_+ auf $\ell_2(\mathbb{N}_0)$.

Aufgabe 7.16 a) Es gilt $Tx = \sum_{j=1}^m \langle Tx | x_j \rangle x_j = \sum_{j=1}^m \langle x | T^*x_j \rangle x_j$ mit einer Orthonormalbasis $\{x_j\}$ von $R(T)$; man kann also $y_j = T^*x_j$ nehmen.

b) Mit a) setzt man $V = [x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m]$.

Aufgabe 7.17 a) Für $\lambda \notin \overline{W(T)}$ hat man $d := d_{\overline{W(T)}}(\lambda) > 0$. Für $\|x\| = 1$ folgt $|\langle (\lambda I - T)x | x \rangle| = |\lambda - \langle Tx | x \rangle| \geq \delta$, und es ist $\lambda I - T \in GL(H)$ nach Satz 7.8.
b) folgt aus a) wegen $W(S^*S) \subseteq [0, \infty)$.

Aufgabe 7.18 a) Man hat $V(e_0^0)(t) = \frac{t}{2\pi} + \frac{1}{2}$ und $V(e_k^0)(t) = \frac{1}{2\pi ik}(e^{ikt} - (-1)^k) = \frac{1}{2\pi ik}e_k^0 - \frac{(-1)^k}{2\pi ik}e_0^0$ für $k \neq 0$.
b) Es ist $V^*f(t) = \int_t^1 f(s)ds$, vgl. S. 243. Der Operator V ist nicht normal wegen $0 = r(V) < \|V\|$ und Satz 7.11.

Aufgabe 7.19 a) Aus $x \in M$ und $y \in M^\perp$ folgt $\langle Ux | Uy \rangle = \langle x | y \rangle = 0$, also $Uy \in (U(M))^\perp$. Für $z \in (U(M))^\perp$ folgt ähnlich $U^{-1}z \in M^\perp$.
b) Für $|\lambda| > 1$ hat man $|\langle (\lambda I - U)x | x \rangle| = |\lambda \langle x | x \rangle - \langle Ux | x \rangle| \geq (|\lambda| - 1)\|x\|^2$, und es folgt $\|R_U(\lambda)\| \leq (|\lambda| - 1)^{-1}$ nach Satz 7.8. Für $|\lambda| < 1$ argumentiert man ähnlich.

Aufgabe 7.20 Satz 7.14 gilt auch für normale Operatoren mit $\sup_n \|T^n\| < \infty$. Dabei verwendet man $N(I - T) = N(I - T^*) = R(I - T)^\perp$. Beachten Sie auch Aufgabe 10.23.

Aufgabe 7.21 ① Durch $U : x = (x_k) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k$ wird eine Isometrie von ℓ_2 auf den Hardy-Raum $H^2(D)$ holomorpher Funktionen auf dem Einheitskreis definiert. Invariante Unterräume von S_+ sind die Räume $V(\alpha) = \{x \in \ell_2 \mid (Ux)(\alpha) = 0\}$ für $\alpha \in D$, ebenfalls Durchschnitte solcher Räume.

② Für eine Folge (α_j) in D gilt $\bigcap_j V(\alpha_j) \neq \{0\} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} (1 - |\alpha_j|) < \infty$; dies ist ein Identitätssatz für $H^2(D)$ -Funktionen (vgl. [Rudin 1974], Ch. 15).

③ Für eine vollständige Charakterisierung aller invarianten Unterräume von S_+ werden auch die fast überall existierenden Randwerte $\widetilde{Ux}(e^{i\varphi}) = \lim_{r \rightarrow 1} Ux(re^{i\varphi})$ benötigt. Für den entsprechenden Satz von Beurling sei auf [Rudin 1974], Thm. 17.21 verwiesen.

Aufgabe 8.1 Es sei $\mathbb{Q} = \bigcup_j \{r_j\}$. Man wählt $f_n \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ mit $f_n(r_j) = j$ für $j = 1, \dots, n$ und erhält $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(r_j) = j$ für alle j .

Aufgabe 8.2 Es seien G_j dichte G_δ -Mengen und $G = \bigcap_j G_j$. Offenbar ist auch G eine G_δ -Menge. Weiter ist $G^c = \bigcup_j G_j^c$ mager und somit G auch dicht in M .

Aufgabe 8.3 Es ist A_n abgeschlossen. Ist $A_n^\circ \neq \emptyset$, so gibt es ein Polynom P mit $U_\varepsilon(P) \subseteq A_n$; man kann aber eine „Zickzack-Funktion“ in $U_\varepsilon(P) \setminus A_n$ konstruieren. Die dichte G_δ -Menge $B := \bigcap_n A_n^c$ besteht aus nirgends differenzierbaren Funktionen.

Aufgabe 8.4 Es ist M_k offen und dicht mit $\lambda(M_k) \leq 2^{-k}$, $N_k := [0, 1] \setminus M_k$ kompakt und nirgends dicht.

Aufgabe 8.5 Mittels Riesz'schem Darstellungssatz identifiziert man H mit H' und verwendet das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

Aufgabe 8.6 Man nimmt $\varphi_n = n \delta_{a+\frac{1}{n}}$.

Aufgabe 8.7 Man benutzt $\sup_n \|A_n\| < \infty$, $\sup_n \|B_n\| < \infty$.

Aufgabe 8.8 ① Es genügt, $\beta(x_n, y_n) \rightarrow 0$ für $x_n \rightarrow 0$ und $y_n \rightarrow 0$ zu zeigen wegen $\beta(x, y) - \beta(x_0, y_0) = \beta(x_0, y - y_0) + \beta(x - x_0, y_0) + \beta(x - x_0, y - y_0)$ und der getrennten Stetigkeit.

② Für die Operatoren $\beta_{x_n} : y \mapsto \beta(x_n, y)$ in $L(Y, Z)$ gilt $\beta_{x_n} \rightarrow 0$ punktweise, nach dem Satz von Banach-Steinhaus also $\beta_{x_n} \rightarrow 0$ gleichmäßig auf präkompakten Teilmengen von Y und insbesondere $\beta(x_n, y_n) \rightarrow 0$.

③ Es genügt die Vollständigkeit von Y (oder X) und man benötigt die Stetigkeit von $\beta^y : x \mapsto \beta(x, y)$ nur auf einer Teilmenge zweiter Kategorie von Y .

Aufgabe 8.9 Die getrennte Stetigkeit folgt aus $|\beta(p, q)| \leq \|p\|_{\sup} \|q\|_{L_1}$. Für die Polynome $p_n(t) = \sqrt{n} t^{n-1}$ gilt $\|p_n\|_{L_1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, aber $\beta(p_n, p_n) = \frac{n}{2n-1} \rightarrow \frac{1}{2}$.

Aufgabe 8.10 ① Die Bedingung $J \cdot L(X) \subseteq J$ bedeutet, dass J ein *Rechtsideal* ist.

② Für festes $S \in J$ hat die lineare Abbildung $\lambda_S : T \mapsto ST$ von $L(X)$ nach J abgeschlossenen Graphen, ist also stetig nach Satz 8.10. Dies gilt entsprechend für festes $T \in L(X)$ und die lineare Abbildung $\rho_T : S \mapsto ST$ von J nach J . Nun verwendet man Aufgabe 8.8.

Aufgabe 8.11 Mit T hat auch T^{-1} abgeschlossenen Graphen.

Aufgabe 8.12 a) - c) sind klar, bei c) verwendet man die „Einheitsvektoren“.

d) ① Durch $\|\cdot\|^*$ wird eine stärkere Norm auf X definiert. Man zeigt die Vollständigkeit von $(X, \|\cdot\|^*)$ und verwendet dann Satz 8.8.

② Wegen der Eindeutigkeit der Reihenentwicklung hängen die Koeffizienten $\alpha_k(x)$ linear von x ab. Für eine Cauchy-Folge $(x^{(j)})$ in $(X, \|\cdot\|^*)$ sind die Folgen $(\alpha_k(x^{(j)}))$ Cauchy in $\mathbb{K}$, und man setzt $\beta_k = \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_k(x^{(j)})$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_n \|P_n x^{(j)} - P_n x^{(m)}\| \leq \varepsilon, \text{ und mit } j \rightarrow \infty \text{ folgt } \sup_n \left\| \sum_{k=0}^n \beta_k x_k - P_n x^{(m)} \right\| \leq \varepsilon.$$

Insbesondere ist $\left\| \sum_{k=\ell}^n \beta_k x_k \right\| \leq 2\varepsilon + \left\| \sum_{k=\ell}^n \alpha_k(x^{(m)}) \right\|$ für $\ell \leq n$. Daher konvergiert die

Reihe $x := \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x_k$, und man hat $\|x - x^{(j)}\|^* \rightarrow 0$.

Aufgabe 8.13 a) Nach dem Satz von Baire gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $(mT)^\circ \neq \emptyset$. Aus $U_\delta(x) \subseteq mT$ folgt $U_\delta(0) \subseteq mT - x \subseteq mT - mT \subseteq 2mT$.

b) Es sei $S_p := \{f \in L_1[-\pi, \pi] \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^p < \infty\}$. Ist S_p nicht mager, so gibt es

nach a) ein $\varepsilon > 0$ mit $\|f\|_{L_1} \leq \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^p \leq 1$. Wie in Satz 8.17 liefert dies einen Widerspruch. Schließlich ist auch $S = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} S_p$ mager.

c) Andernfalls gibt es nach a) eine Abschätzung $\sup_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{-1} |\hat{f}(k)| \leq C \|f\|_{L_1}$, und für $f(t) = e^{imt}$ ergibt sich der Widerspruch $a_m^{-1} \leq C$.

Aufgabe 9.1 b) Auf dem Raum $C := \{x \in \ell_\infty \mid \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n(x)) \text{ existiert}\}$ definiert man $L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x)$; dann gilt offenbar ① und insbesondere $L(x) \leq p_2(x)$. Nun verwendet man den Satz von Hahn-Banach 9.1. Aussage ③ ergibt sich aus $p_2 = 0$ auf $\{x - S_-x \mid x \in \ell_\infty\}$ und $L(x) \geq \liminf x_n \geq 0$ für $x \geq 0$.

Aufgabe 9.2 a) Durch $f : \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \mapsto \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k$ wird aufgrund der Voraussetzung eine Linearform auf $[x_n]$ mit Norm $\leq C$ definiert; diese setzt man mit dem Satz von Hahn-Banach fort.

b) Ein solches μ existiert genau für beschränkte Folgen (α_k) .

Aufgabe 9.5 a) Man hat $|F(x')| \leq (b-a) \|f\|_{\sup} \|x'\|$.

b) Es gilt $\sup_{\|x'\| \leq 1} \|F(x') - \langle \sum_{j=1}^r f(t_j)(t_j - t_{j-1}), x' \rangle\| \rightarrow 0$ mit der Feinheit der Zerlegung.

Aufgabe 9.7 Für eine Funktion $\varphi \in \mathcal{C}[-1, 1]$ mit $\|\varphi\| \leq 1$ und $|\mu(\varphi)| = 2$ muss $|\varphi(t)| = 1$ für alle $t \in [-1, 1]$ gelten.

Aufgabe 9.8 Es sei $v'' \in V''$. Zu $i''v'' \in X''$ gibt es $x \in X$ mit $\iota_X x = i''v''$. Für $x' \in V^\perp$ ist $i'x' = 0$ und daher auch $\langle x, x' \rangle = \langle x', i''v'' \rangle = \langle i'x', v'' \rangle = 0$. Daher folgt $x \in V$ aus Satz 9.4.

Aufgabe 9.9 Für $x = (x_k) \in c$ sei $x_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. Für $y = (y_k) \in \ell_1$ definiert man dann $Jy \in c'$ durch $\langle x, Jy \rangle := x_\infty y_0 + \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_{k+1}$.

Aufgabe 9.10 Man hat die stetige Inklusion $i : L_2(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$. Für ein Funktional $F \in L_1(\Omega)'$ ist dann $i'F \in L_2(\Omega)'$, und es gibt genau eine Funktion $g \in L_2(\Omega)$ mit $\langle \varphi, F \rangle = \int_\Omega \varphi(t) g(t) d\mu$ für $\varphi \in L_2(\Omega)$. Wegen $|\int_\Omega \varphi(t) g(t) d\mu| \leq \|F\| \|\varphi\|_{L_p}$ folgt $g \in L_q(\mu)$ wie in der Diskussion des Beweises von Theorem 9.15 auf S. 174.

Aufgabe 9.11 Der duale Operator ist der Integraloperator mit dem „transponierten“ Kern $\kappa'(t, s) = \kappa(s, t)$.

Aufgabe 9.12 Man definiert eine Projektion $P : X''' \rightarrow \iota_{X'}(X')$ durch $Px''' := x''' \iota_X$. Dagegen ist ι_{C_0} in ℓ_∞ nicht komplementiert, vgl. [Meise und Vogt 1992], 10.15.

Aufgabe 9.13 Man definiert $Pf(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t))$ für $f \in \mathcal{C}[-1, 1]$.

Aufgabe 9.14 Für eine konvergente Folge $x = (x_n) \in c$ definiert man $Rx \in \mathcal{C}[0, 1]$ als die stückweise lineare Funktion mit $Rx(\frac{1}{n+1}) = x_n$.

Aufgabe 9.15 Für $T_0 \in L(V, c_0)$ gibt es zunächst eine „Fortsetzung“ $T_1 \in L(X, \ell_\infty)$ mit $\|T_1\| = \|T_0\|$. Da der Raum $X_1 := \overline{R(T_1) + c_0}$ separabel ist, gibt es eine Projektion P von X_1 auf c_0 mit $\|P\| \leq 2$. Damit setzt man einfach $T = PT_1$. Für Operatoren nach c verwendet man nun Aufgabe 3.7.

Aufgabe 9.16 a) Zu $\varepsilon > 0$ wählt man Vektoren $y_i \in Y$ mit $\pi y_i = T_0(e_i)$ und $\|y_i\| \leq (1 + \varepsilon) \|T_0 e_i\|$. Dann setzt man $T(\sum_{i \in I} x_i e_i) := \sum_{i \in I} x_i y_i$.

b) Man liftet die Identität $I : \ell_1(I) \rightarrow \ell_1(I)$ gemäß a).

Aufgabe 10.1 Für Minima gilt $-u'' + u = 0$, also $u(t) = A \cosh t + B \sinh t$.

Aufgabe 10.2 Für Minima gilt $(tu'(t))' = 0$, also $u(t) = C \log t + D$ über jedem Intervall $[\varepsilon, 1]$. Daher existiert ein Minimum unter den gegebenen Randbedingungen $v(0) = \alpha, v(1) = \beta$ nur für $\alpha = \beta$.

Aufgabe 10.3 Das Funktional hat genau dann ein Minimum in v , wenn $|v'(t)| = 1$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt. Beispiele in $W_2^1(0, 1)$ sind „Zick-Zack-Funktionen“, in $\mathcal{C}^1(0, 1)$ ist dies wegen $v(0) = v(1) = 0$ unmöglich.

Aufgabe 10.4 a) „ $\Rightarrow$ “: Es sei $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ mit o.E. $\|y\| \geq \|x\| > 0$. Dann folgt $\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\| \geq \|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\| - \|\frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\| = \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x\|} - (\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|})\|y\| = 2$, also $\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}$.

„ $\Leftarrow$ “: Aus $\|x\| = \|y\| = \|\frac{1}{2}(x + y)\| = 1$ folgt $\|x + y\| = 2 = \|x\| + \|y\|$, also $x = \alpha y$ und dann $x = y$.

b) Man verwendet a). In der Hölderschen und in der Minkowskischen Ungleichung tritt nur dann „ $=$ “ auf, wenn die Funktionen linear abhängig sind.

Aufgabe 10.5 a) Zu $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ gebe es $x'_1, x'_2 \in X'$ mit $1 = \|x'_j\| = \langle x, x'_j \rangle$. Dann folgt $\langle x, \frac{1}{2}(x'_1 + x'_2) \rangle = 1$, also $\|\frac{1}{2}(x'_1 + x'_2)\| = 1$ und somit $x'_1 = x'_2$.

b) Es seien $x, y, z = \frac{1}{2}(x + y) \in X$ mit $\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$. Nach (9.6) gibt es $z' \in X'$ mit $\|z'\| = 1$ und $\langle z, z' \rangle = 1$. Wegen $|\langle x, z' \rangle| \leq 1$ und $|\langle y, z' \rangle| \leq 1$ muss auch $\langle x, z' \rangle = \langle y, z' \rangle = 1$ gelten; da X' flach normiert ist, folgt $\iota_X x = \iota_X y$ und $x = y$.

Aufgabe 10.6 „ $\Rightarrow$ “: Es seien $x, y \in K$ und $s, t \in K$ mit $|s| + |t| \leq 1$ und o.E. $st \neq 0$. Setze $\alpha = \frac{s}{|s|}$ und $\beta = \frac{t}{1 - |s|}$; dann ist $|\alpha| = 1$ und $|\beta| \leq 1$. Damit folgt $\alpha x \in K, \beta y \in K$ und wegen der Konvexität $sx + ty = |s|\alpha x + (1 - |s|)\beta y \in K$.

Aufgabe 10.7 b) Man hat $C^\circ = \{x \in X \mid p_C(x) < 1\}$ und $\overline{C} = \{x \in X \mid p_C(x) \leq 1\}$.

Aufgabe 10.8 a) Für $y' \in Y'$ hat man $y' \in T(A)^\diamond \Leftrightarrow \forall x \in A : |\langle Tx, y' \rangle| \leq 1 \Leftrightarrow \forall x \in A : |\langle x, T'y' \rangle| \leq 1 \Leftrightarrow T'y' \in A^\diamond$.

b) „ $\Rightarrow$ “ folgt sofort aus a). „ $\Leftarrow$ “: Es gebe $x \in A$ mit $Tx \notin B$. Nach Satz 10.4 gibt es dann $y' \in B^\circ$ mit $|\langle Tx, y' \rangle| > 1$, also $T'y' \notin A^\circ$.

Aufgabe 10.9 Man betrachtet einfach konstante Folgen.

Aufgabe 10.10 Der Beweis von Satz 7.1 lässt sich übertragen.

Aufgabe 10.11 Mit X und Y ist auch $X \times Y$ reflexiv, und $W_p^m(a, b)$ ist zu einem Unterraum von $L_p(a, b)^{m+1}$ isometrisch.

Aufgabe 10.12 Für die „Einheitsvektoren“ gilt $e_n \xrightarrow{w} 0$ in c_0 und $e'_n \xrightarrow{w^*} 0$ in ℓ_1 , aber $\langle e_n, e'_n \rangle = 1$. Die Aussage gilt, wenn eine der Folgen Norm-konvergent ist.

Aufgabe 10.13 Wegen (10.31) kann man eine Folge von „Dreicksfunktionen“ nehmen.

Aufgabe 10.14 Ein Beispiel ist die Folge $(x_n = (1, \dots, 1, 0, \dots))$ mit n Einsen.

Aufgabe 10.16 Nein, sonst wäre $L_q(\mu)$ zu einem Unterraum von ℓ_1 isomorph.

Aufgabe 10.17 Aufgrund der Sätze 10.11 und 10.12 ist ein solches Lifting i. a. nicht möglich.

Aufgabe 10.18 a) Man definiert eine Isometrie $T : \ell_\infty \rightarrow L_\infty[0, 1]$ durch die Formel $T(x_n)(t) = x_n$ für $t \in I_n := (2^{-(n+1)}, 2^{-n})$. Eine stetige Linksinverse von T ist gegeben durch $L : f \mapsto (2^{n+1} \int_{I_n} f(t) dt)$; dann ist TL eine stetige Projektion von $L_\infty[0, 1]$ auf $T(\ell_\infty)$. Die Existenz einer solchen stetigen Projektion folgt auch aus Bemerkung c) auf S. 178.

b) folgt nun aus a), der Nicht-Reflexivität von ℓ_∞ und den Sätzen 9.13 und 9.12.

Aufgabe 10.19 a) Man dualisiert eine Quotientenabbildung $\pi : \ell_1 \rightarrow X$.

c) Man hat $L_\infty[0, 1] \times \ell_\infty \simeq L_\infty[0, 1] \times L_\infty[0, 1] \times V \simeq L_\infty[0, 1] \times V \simeq \ell_\infty$ und auch $L_\infty[0, 1] \times \ell_\infty \simeq \ell_\infty \times W \times \ell_\infty \simeq \ell_\infty \times W \simeq L_\infty[0, 1]$.

Aufgabe 10.21 Man hat $\|T_n^*x\| = \|T_nx\| \rightarrow \|Tx\| = \|T^*x\|$, und für $y \in H$ gilt $\langle T_n^*x|y \rangle = \langle x|T_ny \rangle \rightarrow \langle x|Ty \rangle = \langle T^*x|y \rangle$.

Aufgabe 10.22 a) Es gilt $\|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_j\|^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n \langle e_j|e_k \rangle = \frac{1}{n}$.

b) Man kann $x = 0$ annehmen. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit gibt es $C \geq 0$ mit $\|x_n\| \leq C$ für alle n . Es sei $n_1 = 1$. Wegen $x_n \xrightarrow{w} 0$ gibt es $n_2 > 1$ mit $|\langle x_n|x_{n_1} \rangle| \leq 1$ für $n \geq n_2$. Weiter gibt es $n_3 > n_2$ mit $|\langle x_n|x_{n_2} \rangle| \leq \frac{1}{2}$ für $n \geq n_3$. So erhält man eine Teilfolge mit $|\langle x_{n_{k+1}}|x_{n_j} \rangle| \leq \frac{1}{k}$ für $1 \leq j \leq k$. Daraus folgt $\|\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{n_j}\|^2 = O(\frac{1}{n})$ ähnlich wie in a).

Aufgabe 10.23 ① Für die Operatoren $P_n : x \mapsto \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T^j x$ gilt $\|P_n\| \leq C$. Für $x \in N(I - T)$ gilt offenbar $P_n x = x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wie im Beweis von Satz 7.14 hat

man $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n x = 0$ für $x = y - Ty$, also auch für $x \in \overline{R(I - T)}$.

② Für $x \in X$ gilt $P_{n_j} x \xrightarrow{w} x^*$ für eine geeignete Teilfolge aufgrund von Theorem 10.14. Wegen $\|TP_n x - P_n x\| \rightarrow 0$ ist $Tx^* = x^*$, also $x^* \in N(I - T)$.

③ Es gilt $x - x^* \in \overline{R(I - T)}$. Andernfalls gibt es nach Satz 9.4 ein $f \in \overline{R(I - T)}^\perp$ mit $f(x - x^*) \neq 0$. Wegen $T^n x - T^{n-1} x \in R(I - T)$ ist aber $f(T^n x) = f(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch $f(P_n x - x) = 0$ und $f(x - x^*) = 0$ wegen $P_{n_j} x \xrightarrow{w} x^*$.

④ Nach ③ und ① gilt $\|P_n(x - x^*)\| \rightarrow 0$, und wegen ② ist $P_n x^* = x^*$. Somit hat man $\|P_n x - x^*\| \rightarrow 0$; es ist also $Px := x^* \in N(I - T)$ eindeutig definiert. Nach

③ gilt $X = N(I - T) \oplus \overline{R(I - T)}$.

Aufgabe 11.1 a) Für eine orthonormale Folge gilt $\|e_j - e_k\|^2 = 2$; es gibt also keine konvergente Teilfolge.

b) Es seien (S_n) eine Folge in $K(X, Y)$ mit $S_n \rightarrow S$ in $L(X, Y)$ und (x_j) eine beschränkte Folge in X . Für eine Teilfolge $(x_j^{(1)})$ von (x_j) konvergiert $(S_1 x_j^{(1)})$; für eine weitere Teilfolge $(x_j^{(2)})$ von $(x_j^{(1)})$ konvergiert auch $(S_2 x_j^{(2)})$. Man fährt so fort, und für die Diagonalfolge $(x_j^* := x_j^{(j)})$ konvergiert $(S_n x_j^*)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist aber auch (Sx_j^*) konvergent.

Aufgabe 11.2 Der Operator ist genau dann kompakt, wenn $\lim_{i,j \rightarrow \infty} a_{ij} = 0$ gilt.

Aufgabe 11.3 Der Operator M_a ist nur für $a = 0$ kompakt.

Aufgabe 11.4 Der Operator ist für alle $1 \leq p \leq \infty$ kompakt, vgl. S. 53.

Aufgabe 11.5 Die Operatoren S_ε besitzen L_2 -Kerne. Diese kann man nach einer Orthonormalbasis gemäß Aufgabe 6.7 entwickeln, und daher sind die Operatoren S_ε kompakt. Wie in Aufgabe 3.19 zeigt man schließlich $\|S - S_\varepsilon\| \rightarrow 0$.

Aufgabe 11.6 Aus $(I - S)(I - S_1) = I$ folgt $S_1 = SS_1 - S \in K(X)$.

Aufgabe 11.7 zeigt man wie im Beweis von Satz 13.13.

Aufgabe 11.8 Ist $\{Ry'_1, \dots, Ry'_m\}$ ein ε -Netz in $R(B_{Y'})$, so ist $\{T'y'_1, \dots, T'y'_m\}$ ein 3ε -Netz in $T'(B_{Y'})$.

Aufgabe 11.9 ① Eine beschränkte Folge (x_n) in H hat eine Teilfolge, für die $(S^* S x_{n_j})$ konvergiert. Wegen $\|S(x_{n_j} - x_{n_k})\|^2 = \langle S^* S(x_{n_j} - x_{n_k}), (x_{n_j} - x_{n_k}) \rangle$ ist dann auch (Sx_{n_j}) konvergent.

② Wegen ① gilt $S \in K(H) \Rightarrow SS^* \in K(H) \Rightarrow S^* \in K(H)$.

Aufgabe 11.10 Man wählt eine Folge (x_n) in B_H mit $|\langle Ax_n, x_n \rangle| \rightarrow \|A\|$ und eine schwach konvergente Teilfolge. Die Aussage folgt auch aus Lemma 12.4.

Aufgabe 11.11 In einem Banachraum Y mit Schauder-Basis gilt $P_n y \rightarrow y$ für alle $y \in Y$ für die Projektionen aus Aufgabe 8.12. Für $T \in K(X, Y)$ folgt $P_n T \in \mathcal{F}(X, Y)$ und $\|T - P_n T\| \rightarrow 0$.

Aufgabe 11.12 Für $T \in K(X, \mathcal{C}(K))$ setzt man $T_n x(t) = \sum_{j=1}^r \alpha_j(t) T x(t_j)$. Dann gilt $T_n \in \mathcal{F}(X, \mathcal{C}(K))$ und $\|T - T_n\| \rightarrow 0$.

Aufgabe 11.13 Sind Vektoren $Tx_1, \dots, Tx_r$ linear unabhängig, so gilt dies auch für die Vektoren $F_n x_1, \dots, F_n x_r$ für große n .

Aufgabe 11.14 Für Shift-Operatoren gilt $\text{ind } S_+^m = -m$, $\text{ind } S_-^m = m$ für $m \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 11.15 Man argumentiert wie im Beweis von Lemma 11.6.

Aufgabe 11.16 Man verwendet die Zerlegung aus Abb. 11.1 und addiert einen bijektiven, injektiven bzw. surjektiven Operator $F : N(T) \rightarrow X_2$ mit $F : X_1 \rightarrow \{0\}$.

Aufgabe 11.17 a) folgt leicht aus Aufgabe 11.16.

b) Man hat $c_0 \not\simeq \ell_p$, aber $c_0 \oplus \mathbb{K}^m \simeq c_0$ und $\ell_p \oplus \mathbb{K}^m \simeq \ell_p$. Die zweite Behauptung ergibt sich genauso.

Aufgabe 11.18 Wir verwenden die Zerlegung aus Abb. 11.1. Für $x' \in N(T)^\perp$ definieren wir durch $y \mapsto \langle T_1^{-1} y, x' \rangle$ eine stetige Linearform auf $R(T)$ und setzen diese nach Hahn-Banach zu $y' \in Y'$ fort. Für $x \in X$ gilt dann $\langle x, T' y' \rangle = \langle Tx, y' \rangle = \langle T_1^{-1} Tx, x' \rangle = \langle (I - P)x, x' \rangle = \langle x, x' \rangle$ wegen $\langle Px, x' \rangle = 0$.

Aufgabe 11.19 Es ist πT genau dann linksinvertierbar, wenn $\dim N(T) < \infty$ und $R(T)$ komplementiert ist; πT ist genau dann rechtsinvertierbar, wenn $\text{codim } R(T) < \infty$ und $N(T)$ komplementiert ist.

Aufgabe 11.20 a) Man argumentiert wie in Aufgabe 7.16.

b) Man hat $T = I$ auf N_F und $T(X_F) \subseteq X_F$. c) ist klar.

d) Zu $S \in \overline{\mathcal{F}(X)}$ wählt man $F \in \mathcal{F}(X)$ mit $\|S - F\| < 1$; aufgrund der Neumannschen Reihe ist dann $U := I - (S - F) \in GL(X)$. Wegen $T = U - F = U(I - U^{-1}F)$ und $U^{-1}F \in \mathcal{F}(X)$ folgt die Behauptung nun aus b) und c).

Aufgabe 11.21 a) und b) gelten wegen $\lambda^p I - A^p = (\lambda I - A) \sum_{j=0}^{p-1} \lambda^j A^{p-1-j}$, wobei die Reihenfolge der beiden Faktoren auch vertauscht werden kann.

c) Nach b) gilt $\lambda I - A \in \Phi(X)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und wegen Theorem 11.11 gilt dort $\text{ind}(\lambda I - A) = 0$. Ist nun $\sigma(A) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \geq \delta\}$ für ein $\delta > 0$ unendlich, so gilt dies nach a) auch für $\sigma(A^p) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \geq \delta\}$ im Widerspruch zu Theorem 11.14.

d) Man definiert $A \in L(\ell_2)$ durch $A(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_0, 0, x_2, 0, x_4, 0, \dots)$.

Aufgabe 11.22 Anderfalls gilt stets $N(T^n) \neq N(T^{n+1})$ und man konstruiert einen

Widerspruch wie im Beweis von Theorem 11.14.

Aufgabe 12.1 Der Operator S_k hat die Eigenwerte $\lambda_k = \frac{1}{k^2\pi^2}$, $k \in \mathbb{N}$, zu den orthonormalen Eigenvektoren $\varphi_k(t) = \sqrt{2} \sin k\pi t$.

Aufgabe 12.2 „ $\Rightarrow$ “: Für $y = Sx = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \langle x|e_j \rangle e_j \in R(S)$ gilt $y \in N(S^*)^\perp = N(S)^\perp$ und $\langle y|e_k \rangle = \lambda_k \langle x|e_k \rangle$.

„ $\Leftarrow$ “: Wegen $y \in N(S)^\perp$ gilt $\langle y|e_j \rangle = 0$ für $\lambda_j = 0$, und man hat $y = Sx$ für $x = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j^{-1} \langle y|e_j \rangle e_j$.

Aufgabe 12.3 „ $\leq$ “: Für einen Vektor $x \in V := [e_0, \dots, e_j]$ mit $\|x\| = 1$ gilt $\langle Ax|x \rangle = \sum_{k=0}^j \lambda_k |\langle x|e_k \rangle|^2 \geq \lambda_j$.

„ $\geq$ “: Für jeden Raum V mit $\dim V = j+1$ gibt es $v \in V \cap [e_0, \dots, e_{j-1}]^\perp$ mit Norm 1, und daher ist $\min \{ \langle Ax|x \rangle \mid \|x\| \leq 1, x \in V \} \leq \langle Av|v \rangle = \sum_{k=j}^{\infty} \lambda_k |\langle v|e_k \rangle|^2 \leq \lambda_j$.

Aufgabe 12.4 „ $\Leftarrow$ “: Wegen $ST = TS$ und $ST^* = T^*S$ ist jeder Eigenraum von S unter T und T^* invariant, hat also eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von T . „ $\Rightarrow$ “ ist klar.

Aufgabe 12.5 „ $\Rightarrow$ “: Aus $T = U^{-1}SU$ folgt $\lambda I - T = U^{-1}(\lambda I - S)U$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. „ $\Leftarrow$ “: Nach Voraussetzung haben S und T die gleichen Eigenwerte mit gleicher Vielfachheit. Man konstruiert U , indem man die Eigenräume isometrisch aufeinander abbildet.

Aufgabe 12.6 ergibt sich aus $a_{ij} = \langle Te_j|e_i \rangle$.

Aufgabe 12.7 Es sei T ein Hilbert-Schmidt-Operator auf $L_2(\Omega)$. Nach Satz 12.10 gilt $Tf(t) = \sum_{k=0}^{\infty} s_j(T) \int_{\Omega} f(s) \overline{g_j(s)} ds h_j(t)$ mit Orthonormalsystemen $\{g_j\}$ und h_j in $L_2(\Omega)$. Daraus folgt $Tf(t) = \int_{\Omega} \kappa(t, s) f(s) ds$ mit $\kappa(t, s) = \sum_{k=0}^{\infty} s_j(T) \overline{g_j(s)} h_j(t)$.

Aufgabe 12.8 Für $x \in H$ und $t \in K$ gilt $Tx(t) = \langle Tx, \delta_t \rangle = \langle x, T'\delta_t \rangle = \langle x|j_H^{-1}T'\delta_t \rangle$ mit der kanonischen Isometrie $j_H : H \rightarrow H'$. Für eine Orthonormalbasis $\{e_i\}_{i \in I}$ von H gilt daher für jede endliche Indexmenge $I' \subseteq I$: $\sum_{i=1}^m \|jTe_i\|^2 = \sum_{i=1}^m \int_K |Te_i(t)|^2 dt = \int_K \sum_{i=1}^m |\langle e_i, j_H^{-1}T'\delta_t \rangle|^2 dt \leq \int_K \|j_H^{-1}T'\delta_t\|^2 dt \leq \lambda(K) \|T'\|^2 = \lambda(K) \|T\|^2$ aufgrund der Besselschen Ungleichung.

Aufgabe 12.9 Es ist $T = S_+D$ mit dem kompakten Diagonaloperator $D = \text{diag}(\frac{1}{j+1})$. Es folgt $T^* = D^*S_- = DS_-$ und $T^*T = DS_-S_+D = D^2$, also $|T| = D$ und $s_j(T) = \frac{1}{j+1}$. Offenbar ist $T = S_+D$ die Polarzerlegung von T .

Aufgabe 12.10 a) ① Für (33) ist nur „ $\Rightarrow$ “ zu zeigen. Ist $\text{rk } S > n$, so gibt es linear unabhängige Vektoren $y_0 = Sx_0, \dots, y_n = Sx_n$ in $R(S)$. Mit $Z := [x_0, \dots, x_n]$ ist $S : Z \mapsto S(Z)$ bijektiv; es gibt also $c > 0$ mit $\|Sx\| \geq c\|x\|$ für $x \in Z$. Für $\text{rk } F \leq n$ gibt es $\xi \in Z$ mit $\|\xi\| = 1$ und $F\xi = 0$. Es folgt $\|S - F\| \geq \|(S - F)\xi\| = \|S\xi\| \geq c\|\xi\| = c$, also der Widerspruch $\alpha_n(S) \geq c > 0$.

② Zu $\varepsilon > 0$ gibt es F_1, F_2 mit $\text{rk } F_1 \leq n$, $\text{rk } F_2 \leq m$ und $\|S - F_1\| \leq \alpha_n(S) + \varepsilon$, $\|T - F_2\| \leq \alpha_m(T) + \varepsilon$. Dann folgt $\text{rk}(F_1 + F_2) \leq n + m$ und $\|(S + T) - (F_1 + F_2)\| \leq \alpha_n(S) + \alpha_m(T) + 2\varepsilon$, also (35). Insbesondere ist $\alpha_n(S) \leq \alpha_n(T) + \|T - S\|$, und daraus folgt (36). Auch (34) ergibt sich leicht.

③ Nun wählt man F_3 mit $\text{rk } F_3 \leq m$ und $\|C - F_3\| \leq \alpha_m(C) + \varepsilon$. Es folgt $\|SC - F_1(C - F_3) - SF_3\| = \|(S - F_1)(C - F_3)\| \leq (\alpha_n(S) + \varepsilon)(\alpha_m(C) + \varepsilon)$, wegen $\text{rk}(F_1(C - F_3) - SF_3) \leq n + m$ also (37). Daraus folgt sofort auch (38).

b) Wegen $\text{rk } I_X = j$ ist $s_j(I_X) = 0$. Für $F \in L(X)$ mit $\text{rk } F \leq j - 1$ gibt es $x \in X$ mit $Fx = 0$ und $\|x\| = 1$, und man hat $\|I - F\| \geq \|(I - F)x\| = \|x\| = 1$.

Aufgabe 12.11 a) Man argumentiert wie in Satz 12.11.

b) Nach Definition ist $c_j(T)$ unabhängig von einer „Erweiterung“ des Zielraums. Dies gilt nicht für die Approximationszahlen: Nach dem Resultat von P. Enflo (vgl. S.214) gibt es einen Operator $T \in L(X, Y)$ mit $\alpha_j(T) \not\rightarrow 0$; für eine Isometrie $\iota : Y \rightarrow \ell_\infty(I)$ gilt jedoch $\alpha_j(\iota T) = c_j(T) \rightarrow 0$ nach den Aufgaben 12.12 und 12.11.c).

c) „ $\Rightarrow$ “: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine Projektion $P \in L(X)$ mit $\dim R(P) < \infty$ und $\|T|_{N(P)}\| \leq \varepsilon$. Zu $\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{\|T\|}, 1\} > 0$ gibt es $x_1, \dots, x_r \in B = B_1(0)$, sodass $\{Px_1, \dots, Px_r\}$ ein δ -Netz von $P(B)$ ist. Dann ist $\{Tx_1, \dots, Tx_r\}$ ein 4ε -Netz von $T(B)$.

„ $\Leftarrow$ “: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein ε -Netz $\{Tx_1, \dots, Tx_r\}$ von $T(B)$. Nach (9.6) gibt es $y'_j \in Y'$ mit $\|y'_j\| = 1$ und $\|Tx_j\| = |\langle Tx_j, y'_j \rangle| = |\langle x_j, T'y'_j \rangle|$. Für den Raum $N := \bigcap_{j=1}^r N(T'y'_j)$ gilt $\text{codim } N \leq r$, und für $x \in B \cap N$ gibt es ein $j \in \{1, \dots, r\}$ mit $\|Tx\| \leq \varepsilon + \|Tx_j\| \leq \varepsilon + |\langle Tx_j, y'_j \rangle| \leq \varepsilon + |\langle (Tx_j - Tx), y'_j \rangle| \leq 2\varepsilon$.

Aufgabe 12.12 a) Man argumentiert wie in Satz 12.12, ebenso für b) im Fall eines Hilbertraums X .

d) Man hat $c_j(T) = c_j(\iota T) \leq \alpha_j(\iota T)$. Zu $\varepsilon > 0$ sei $V \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum mit $\text{codim } V = j$ und $\|T|_V\| \leq (1 + \varepsilon)c_j(T)$. Der Operator $\iota T : V \rightarrow \ell_\infty$ hat eine Fortsetzung $S : X \rightarrow \ell_\infty$ mit $\|S\| = \|\iota T|_V\| \leq (1 + \varepsilon)c_j(T)$. Wegen $\text{rk}(\iota T - S) \leq j$ ergibt sich daraus $\alpha_j(\iota T) \leq (1 + \varepsilon)c_j(T)$.

Aus d) folgen nun der fehlende Teil von b) sowie c).

Aufgabe 12.13 a) Wegen $p \leq 2$ ist $T \in S_2(H)$, hat also eine Schmidt-Darstellung $Tx = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \langle x | g_j \rangle f_j$ mit Orthonormalsystemen $\{g_j\}$ und $\{f_j\}$. Mittels Hölderscher Ungleichung folgt $\sum_{j=0}^{\infty} s_j^p = \sum_{j=0}^{\infty} s_j^p \sum_{i \in I} |\langle e_i | g_j \rangle|^2 = \sum_{i \in I} \sum_{j=0}^{\infty} s_j^p |\langle e_i | g_j \rangle|^p |\langle e_i | g_j \rangle|^{2-p} \leq$

$$\sum_{i \in I} \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_j^2 |\langle e_i | g_j \rangle|^2 \right)^{p/2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\langle e_i | g_j \rangle|^2 \right)^{\frac{2-p}{2}} \leq \sum_{i \in I} \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_j^2 |\langle e_i | g_j \rangle|^2 \right)^{p/2} = \sum_{i \in I} \|Te_i\|^p.$$

b) Mit der Darstellung $Tx = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \langle x | g_j \rangle f_j$ wie in a) folgt $\|Te_i\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} s_j^2 |\langle e_i | g_j \rangle|^2 \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_j^p |\langle e_i | g_j \rangle|^2 \right)^{\frac{2}{p}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\langle e_i | g_j \rangle|^2 \right)^{\frac{p-2}{p}} \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_j^p |\langle e_i | g_j \rangle|^2 \right)^{\frac{2}{p}}$, und damit ergibt sich $\sum_{i \in I} \|Te_i\|^p \leq \sum_{i \in I} \sum_{j=0}^{\infty} s_j^p |\langle e_i | g_j \rangle|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} s_j^p$.

Aufgabe 12.14 a) immer,

b) für $\alpha > \frac{1}{p}$ oder $\beta > \frac{1}{p}$, immer für $\alpha \in \mathbb{N}$ oder $\beta \in \mathbb{N}$,

c) für $2\alpha > \frac{1}{p}$ oder $2\beta > \frac{1}{p}$, immer für $\alpha \in \mathbb{N}$ oder $\beta \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 12.15 a), b) ① Für $S \in S_1(H, G)$ hat man eine Schmidt-Darstellung $Sx = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \langle x | e_j \rangle f_j$; diese erfüllt auch (47) und das Infimum in (48) ist $\leq \sigma_1(S)$.

② Für $S \in L(H, G)$ gelte nun (48). Dann ist $S \in K(E, F)$ und hat somit eine Schmidt-Darstellung $Sx = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \langle x | e_j \rangle f_j$. Für $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich dann $\sum_{j=0}^n s_j = \sum_{j=0}^n \langle Se_j | f_j \rangle \leq \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{\infty} |\langle e_j | x_k \rangle \langle y_k | f_j \rangle| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n |\langle e_j | x_k \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^n |\langle y_k | f_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|x_k\| \|y_k\|$ nach der Schwarzschen und der Besselschen Ungleichung. Aus (48) folgen leicht die Norm-Eigenschaften.

c) Die Vollständigkeit ergibt sich mittels Satz 1.6, die Dichtheit wie in Satz 12.8.

Aufgabe 12.16 a) Es sei $Sx = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \langle x | e_j \rangle f_j$ eine Schmidt-Darstellung von S .

Dann ist $TSx = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \langle x | e_j \rangle Tf_j$ und $\sum_{j=0}^{\infty} \|s_j e_j\| \|Tf_j\| \leq \sigma_2(S) \sigma_2(T)$.

b) Für $Nx = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \langle x | e_j \rangle f_j$ sei $Sx = \sum_{j=0}^{\infty} s_j^{1/2} \langle x | e_j \rangle f_j$ und $Tx = \sum_{j=0}^{\infty} s_j^{1/2} \langle x | e_j \rangle e_j$.

Aufgabe 12.17 a) Es ist $\sum_{i \in I} \langle Se_i | e_i \rangle = \sum_{i \in I} \langle T_2 e_i | T_1^* e_i \rangle = \langle T_2 | T_1^* \rangle_2$ mit einer Zerlegung $S = T_1 T_2$ wie in Aufgabe 12.16.

b) Weiter folgt $|\operatorname{tr} S| = |\langle T_2 | T_1^* \rangle_2| \leq \|T_2\|_2 \|T_1^*\|_2 = \sigma_1(S)$. Linearität und die Formel $\operatorname{tr}(S^*) = \operatorname{tr}(S)$ sind klar.

c) Es ist $\sum_{i \in I} \langle Se_i | e_i \rangle = \sum_{i \in I} \sum_{k=0}^{\infty} \langle e_i | x_k \rangle \langle y_k | e_i \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i \in I} \langle e_i | x_k \rangle \langle y_k | e_i \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle y_k | x_k \rangle$.

d) Es sei $Ax = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \langle x | e_j \rangle f_j$ eine Schmidt-Darstellung von A . Dann erhält man nukleare Darstellungen von BA und $(AB)^* = B^* A^*$ durch $BAx = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \langle x | e_j \rangle Bf_j$

und $B^*A^*x = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \langle x|f_j \rangle B^*e_j$, also $\text{tr}(BA) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \langle Bf_j|e_j \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \langle f_j|B^*e_j \rangle = \overline{\text{tr}(B^*A^*)} = \text{tr}(AB)$ aufgrund von c).

e) Für *normale* Operatoren $S \in S_1(H)$ gilt $\langle Se_j|e_j \rangle = \lambda_j(S)$.

Aufgabe 12.18 a) Man hat $S_\kappa f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f|\overline{b_k} \rangle a_k(t)$. Nun verwendet man die Aufgaben 12.15 und 12.17 c).

b) Fourier-Entwicklung liefert $\kappa(t, s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\kappa^s}(k) e^{ikt}$ mit $|\widehat{\kappa^s}(k)| \leq \frac{1}{k^2} \|\partial_t^2 \kappa\|_{\text{sup}}$.

c) Es gibt $\kappa_n \in \mathcal{C}[-\pi, \pi] \otimes \Lambda_{2\pi}^\alpha$ mit $\kappa_n \rightarrow \kappa$ in $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \Lambda_{2\pi}^\alpha)$, und für κ_n gilt die Spurformel. Wegen (46) gilt $S_{\kappa_n} \rightarrow S_\kappa$ in $S_2(L_2[-\pi, \pi], H_{2\pi}^s)$ für $\frac{1}{2} < s < \alpha$, und aus (42) folgt schließlich $S_{\kappa_n} \rightarrow S_\kappa$ in $S_1(L_2[-\pi, \pi])$.

Aufgabe 13.1 Es ist $y \mapsto \langle Tx|y \rangle = \sum_{j=0}^n (j+1)x_j \overline{y_0} + \sum_{k \geq 1} x_k \overline{y_k}$ genau dann stetig, wenn $y_0 = 0$ gilt, und in diesem Fall ist $\langle Tx|y \rangle = \langle x|y \rangle$.

Aufgabe 13.2 a) $\{x \in \ell_2 \mid \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}x_j \text{ konvergiert für } j \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \sum_{i=0}^{\infty} |\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}x_j|^2 < \infty\}$ ist der maximale Definitionsbereich von A .

b) Man hat $[e_j] \subseteq D(A)$ und $\langle A_0 e_k|y \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ik} \overline{y_i} = \langle e_k|A^\times y \rangle$ für $y \in D(A^\times)$, also $A^\times \subseteq A_0^*$. Nun sei $y \in D(A_0^*)$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ gilt dann $\langle e_k|A_0^* y \rangle = \langle A_0 e_k|y \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ik} \overline{y_i}$, und es folgt $\sum_{k=0}^{\infty} |\sum_{i=0}^{\infty} \overline{a_{ik}} y_i|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle A_0^* y|e_k \rangle|^2 < \infty$, also $y \in D(A^\times)$.

c) Transposition von b) liefert nun $A = (A^\times)_0^*$, und man verwendet Satz 13.6.

d) Durch $Be_j = (a_{ij})_i \in \ell_2$ wird eine symmetrische Matrix wie in c) definiert, und man hat $Bx = Ax$ für $x \in D(B)$.

Aufgabe 13.3 Man argumentiert wie in Banachalgebren, vgl. Formel (4.14).

Aufgabe 13.4 Im Fall $T \in L(H)$ hat man Gleichheit.

Aufgabe 13.5 a) Es sei (y_n) eine Folge in $D(T^*)$ mit $y_n \rightarrow y$ und $T^* y_n \rightarrow z$ in H . Für $x \in D(T)$ gilt dann $\langle Tx|y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle Tx|y_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x|T^* y_n \rangle = \langle x|z \rangle$, und es folgen $y \in D(T^*)$ sowie $T^* y = z$.

b) ergibt sich ähnlich wie a).

c) Es sei (y_n) eine Folge in $D(T)$ mit $y_n \rightarrow 0$ und $Ty_n \rightarrow z$ in H . Für $x \in D(T)$ gilt $\text{Re} \langle x|Tx + \lambda z \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Re} \langle x|Tx + \lambda Ty_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Re} \langle x + \lambda y_n|T(x + \lambda y_n) \rangle \geq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, und daraus folgt $\langle x|z \rangle = 0$.

Aufgabe 13.6 a) Für $\lambda \in \rho(T)$ ist $\lambda I - T$ abgeschlossen, und dies gilt nach Satz 13.3 dann auch für T .

b) Wegen (22) ist $iI - A : D_A \rightarrow R(iI - A)$ eine Isomorphie.

Aufgabe 13.7 a) „ $\Rightarrow$ “: Wegen $R(A)^\perp = N(A^*) = N(A) = \{0\}$ existiert A^{-1} , und nach Satz 13.7 ist $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}$.

„ $\Leftarrow$ “: Es ist $D(A^*) = R((A^*)^{-1}) = R((A^{-1})^*) = R(A^{-1}) = D(A)$, und für $y \in D(A)$ gilt $(A^{-1})^* A^* y = y$ und auch $(A^{-1})^* A y = y$, also $A^* y = A y$.

Aufgabe 13.8 Aus $\lambda \in \rho(T)$ folgt $\bar{\lambda} \in \rho(T^*)$ nach Satz 13.7, und die Umkehrung gilt wegen $T = T^{**}$, vgl. Satz 13.6 d).

Aufgabe 13.9 Da T^* abgeschlossen ist, folgt die Stetigkeit von T^* aus dem Graphensatz 8.10. Nach Satz 13.6 ist $T \subseteq \bar{T} = T^{**}$ ebenfalls stetig. Für abgeschlossene Operatoren T gilt sogar $T = T^{**}$ und somit $D(T) = H$.

Aufgabe 13.10 Symmetrie und Abgeschlossenheit von A folgen wie in dem Beispiel auf S. 267, ebenso die Aussage $D(A^*) = W_2^1(0, \infty)$. Wegen $\dim D(A^*)/D(A) = 1$ besitzt A keine selbstadjungierte Erweiterung.

Aufgabe 13.11 a) Es sei $\gamma = e^{-i\varphi}$. Man hat die Eigenfunktionen $\varphi_k(t) = \frac{e^{-i\lambda_k t}}{\sqrt{b-a}}$ zu den Eigenwerten $\lambda_k = \frac{\varphi}{b-a} + \frac{2k\pi}{b-a}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Für $[a, b] = [0, \ell]$ und $u(0) = u(\ell) = 0$ hat man die Eigenwerte $\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{\ell^2}$, $k \in \mathbb{N}$, zu den orthogonalen Eigenfunktionen $\varphi_k(t) = \sin k \frac{\pi}{\ell} t$. Für $u'(0) = u'(\ell) = 0$ hat man die Eigenwerte $\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{\ell^2}$, $k \in \mathbb{N}_0$, zu den orthogonalen Eigenfunktionen $\psi_k(t) = \cos k \frac{\pi}{\ell} t$.

Aufgabe 13.12 Man verifiziert die Aussagen des Hinweises.

Aufgabe 13.13 a) Man verfährt wie in Abschnitt 13.4. Nach b) müssen die Eigenwerte nicht einfach sein.

b) In $L_2[-\pi, \pi]$ hat man die Eigenwerte $\lambda_k = k^2$, $k \in \mathbb{Z}$, zu den orthonormalen Eigenfunktionen e^{ikt} . Das Problem $\partial_t u(x, t) = \alpha \partial_x^2 u(x, t)$ mit Anfangsbedingung $u(x, 0) = A(x)$ wird gelöst durch $u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{A}(k) e^{-\alpha k^2 t} e^{ikx} = (\vartheta^{\alpha t} \star A)(x)$ mit der *Theta-Funktion* $\vartheta(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t} e^{ikx} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{(x-2\pi n)^2}{4t})$ (vgl. [Kaballo 1999], Abschnitt 35).

Aufgabe 13.14 a) ① Es sei $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_j \geq 0$ für $j \geq j_0$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $j_1 \geq j_0$ mit $\sum_{j=j_1}^{\infty} |\langle x | e_j \rangle|^2 \leq \varepsilon^2$, und es folgt $\|S(h)x - x\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |e^{-\lambda_j h} - 1|^2 |\langle x | e_j \rangle|^2 \leq \sum_{j=0}^{j_1-1} |e^{-\lambda_j h} - 1|^2 |\langle x | e_j \rangle|^2 + \varepsilon^2 \leq 2\varepsilon^2$ für genügend kleine $h > 0$.

② Für $t > 0$ ergibt sich analog $\|S(t+h)x - S(t)x\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-2\lambda_j t} |e^{-\lambda_j h} - 1|^2 |\langle x | e_j \rangle|^2 \leq \varepsilon^2 \|x\|^2$ für genügend kleine $h > 0$ durch Aufteilung in 2 Summanden.

b) Man argumentiert wie in Satz 13.20 und in a).

Aufgabe 13.15 Man benutzt $P_j P_k = 0$ für $j \neq k$ und die unbedingte punktweise Konvergenz der Reihen.

Aufgabe 13.16 ⑤ Für eine disjunkte Vereinigung $\delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n$ und $f \in L_2(\Omega)$ gilt

$$E(\delta)f = \chi_{a^{-1}(\delta)}f = \chi_{a^{-1}(\bigcup \delta_n)}f = \chi_{\bigcup a^{-1}(\delta_n)}f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{a^{-1}(\delta_n)}f = \sum_{n=1}^{\infty} E(\delta_n)f.$$

Aufgabe 13.17 Man argumentiert wie in Aufgabe 13.10 oder verwendet die unitäre Fouriertransformation auf $L_2(\mathbb{R})$ (vgl. etwa [Kaballo 1999], Abschnitt 41). Damit gilt $P = \mathcal{F}^{-1} M_{\xi} \mathcal{F}$; mit M_{ξ} ist auch P selbstadjungiert, und man hat $\sigma(P) = \mathbb{R}$.

Aufgabe 13.18 a) Wegen $\|x\| = 1$ gilt $\delta(A, x) = 0 \Leftrightarrow Ax = \lambda x$ mit $\lambda = \langle Ax|x \rangle$.

b) Mit $\alpha = \langle Ax|x \rangle$ und $\beta = \langle Bx|x \rangle$ betrachtet man $A^{\alpha} = A - \alpha I$ und $B^{\beta} = B - \beta I$. Damit ergibt sich $\langle [A, B]x|x \rangle = \langle (AB - BA)x|x \rangle = \langle (A^{\alpha}B^{\beta} - B^{\beta}A^{\alpha})x|x \rangle = \langle A^{\alpha}B^{\beta}x|x \rangle - \langle x|A^{\alpha}B^{\beta}x \rangle = 2i \operatorname{Im} \langle A^{\alpha}B^{\beta}x|x \rangle$ und somit $|\langle [A, B]x|x \rangle| \leq 2 |\langle B^{\beta}x|A^{\alpha}x \rangle| \leq 2 \|B^{\beta}x\| \|A^{\alpha}x\| = 2\delta(A, x)\delta(B, x)$.



<http://www.springer.com/978-3-662-54747-2>

Grundkurs Funktionalanalysis

Kaballo, W.

2018, XX, 398 S. 117 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-54747-2